PRÁCTICA Nº9

Espacios vectoriales: Bases y coordenadas.

Recordemos que llamamos vector a un elemento de un espacio vectorial. En el caso en que dicho espacio sea $\mathbb{K}^n$, los vectores serán n-uplas y los introduciremos en Mathematica como una lista formada por n elementos de $\mathbb{K}$. Así, por ejemplo el vector $v = (1, -2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$, lo escribiremos:

In[]:= **v={1,-2,3};**

Para cualquier otro espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, de dimensión n, utilizaremos su identificación con $\mathbb{K}^n$ a través de las coordenadas respecto de una determinada base. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 3x^2 + x + 2$ de $P_2(\mathbb{R})$ lo identificamos con (2,1,3) pues éstas son sus coordenadas respecto de la base canónica $\{1, x, x^2\}$.

1. BASES Y COORDENADAS

1.1. INDEPENDENCIA LINEAL

En un espacio vectorial V, un conjunto finito de vectores se dice linealmente independiente si el vector cero se escribe de forma única como combinación lineal de dichos vectores y, por tanto, con escalares cero. Para espacios de dimensión finita, esto puede traducirse en el estudio de los sistemas homogéneos que tienen como matriz de coeficientes a aquella en la que sus columnas son las coordenadas, respecto de una determinada base (elegiremos siempre que sea posible la canónica), de los vectores que estamos estudiando. El teorema de Rouché-Frobenius nos permite deducir que un conjunto de r vectores es linealmente independiente si y sólo si el rango de la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores respecto de una base, es igual al número de vectores.

Por ejemplo, si queremos estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores de $\mathbb{R}^3$ $v = (1, 0, 0)$ y $w = (-1, 1, 0)$, escribiremos:

In[]:=
```
{{1,0,0},{-1,1,0}};
MatrixForm[RowReduce[Transpose[a]]]
```

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, el rango es 2, igual al número de vectores, y el conjunto es linealmente independiente.

1.2. BASE Y COORDENADAS RESPECTO DE UNA BASE

Sabemos que una base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independiente y que además es un sistema de generadores de dicho espacio. Durante esta práctica tomaremos como ejemplo a $V = \mathbb{R}^3$ cuyos elementos son ternas (x, y, z) con cada una de sus componentes en $\mathbb{R}$. Como ejemplo consideremos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$$

Las bases las introducimos en Mathematica como matrices, es decir, como lista de listas siendo cada una de sus componentes uno de los vectores de la base:

In[]:= **b1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};**

Para probar si dichos vectores forman base de $\mathbb{R}^3$ y como conocemos la dimensión del espacio que es 3, nos bastará con ver que son linealmente independientes, pues como sabemos tres vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión 3 forman base. Para ver que son linealmente independientes basta con calcular su determinante, si es distinto de cero forman base y si es cero son linealmente dependientes y no forman base.

In[]:= **Det[b1]**

Out[]= `-1`

Por tanto, B_1 es base de $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas de un vector respecto de una base se pueden calcular mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. Consideremos el vector v de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (4, 1, –2) respecto de la base canónica, veamos cuáles son sus coordenadas respecto de la base B_1. Las coordenadas buscadas serán los números x, y, z tales que:

$$(4, 1, -2) = x(1, 0, 0) + y(-1, 1, 0) + z(0, 1, -1)$$

es decir, la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base y cuyo vector de términos independientes es el vector v. En Mathematica:

In[]:= **v={4, 1, -2};**
vb1=LinearSolve[Transpose[b1], v]

Out[]= `{3,-1,2}`

Comprobemos que éstas son las coordenadas del vector v respecto de la base B_1:

In[]:= **v==Sum[vb1[[i]]b1[[i]],{i,3}]**

Out[]= `True`

1.3. CAMBIO DE BASE

Supongamos que tenemos dos bases B_1 y B_2 de un espacio vectorial, nos proponemos encontrar la matriz del cambio de base B_1 a B_2, que nos permite calcular las coordenadas de cualquier vector respecto de B_2, conocidas las coordenadas de dicho vector respecto de B_1. Como sabemos la matriz del cambio de base es la matriz regular que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la primera base, B_1 respecto a la segunda base, B_2.

Como ejemplo consideremos las bases de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1,0,1),(-1,1,0),(0,1,-1)\}$$
$$B_2 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(-1,1,1)\}$$

En primer lugar introducimos las bases en el Mathematica y comprobamos que realmente lo son:

In[]:= **b1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};**

```
                Det[b1]

Out[]=          -1

In[]:=          b2={{1,0,-1},{2,1,0},{-1,1,1}};
                Det[b2]

Out[]=          -2
```

Teniendo en cuenta lo anterior, la matriz del cambio de base de B_1 a B_2 se puede construir como sigue:

```
In[]:=          P = Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[B2],B1[[i]]],{i,1,3,1}]];
                MatrixForm[P]
```

Out[]=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Una vez construida la matriz del cambio de base es inmediato obtener las coordenadas del vector v = (4, 1, -2) respecto de la base B_2 conocidas las coordenadas del mismo respecto de B_1. Por la práctica anterior introducimos el vector y calculamos sus coordenadas respecto de B_1:

```
In[]:=          v = {4, 1, -2};
                vb1 = LinearSolve[Transpose[b1], v]

Out[]=          {3,-1,2}
```

Para calcular las coordenadas respecto de la nueva base, utilizaremos el cambio de base, con lo que basta con multiplicar dicha matriz por el vector vb1:

```
In[]:=          vb2= P.vb1

Out[]=          {2,1,0}
```

Podemos comprobar que el cambio de base se ha realizado satisfactoriamente transformando ambos vectores a sus coordenadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ para lo cual solo hay que sumar los productos de cada una de las componentes del vector v1 por el respectivo elemento de la base:

```
In[]:=          Sum[v1[[i]]*b1[[i]],{i,1,3}] == Sum[v2[[i]]*b2[[i]],{i,1,3}]

Out[]:=         True
```