

13. Polinomios. Cálculos básicos y divisibilidad

Ejemplos con Mathematica

1. Representación de polinomios en una y varias variables

Para introducir el polinomio $p(x) = x^2 + 1$, escribiremos:

```
p[x_] := x^2 + 1
```

La representación de los polinomios de varias variables se hará de forma análoga, por ejemplo si $q(x, y) = xy + x + 1$ escribiremos:

```
q[x_, y_] := x * y + x + 1
```

■ Ejemplo 13.1.

Expresar el polinomio en dos variables $q(x, y) = xy + x + 1$ en función de la indeterminada x y luego en función de y .

Expresamos el polinomio $q(x, y)$ en función de la indeterminada x

```
Collect[x * y + x + 1, x]
```

```
1 + x (1 + y)
```

o bien podemos verlo en función de la indeterminada y

```
Collect[x * y + x + 1, y]
```

```
1 + x + x y
```

■ Ejemplo 13.2.

Comprobar que la función $f(x) = 1/x$ no es un polinomio y que $x + 1$ si lo es.

```
f[x_] := 1 / x
PolynomialQ[f[x], x]
```

```
False
```

```
PolynomialQ[x + 1, x]
```

```
True
```

■ Ejemplo 13.3.

Consideremos el polinomio $(1 + 2x + x^2)(1 - x^2 + x^3)$. Para ponerlo en forma extendida

```
Expand[(1 + 2 x + x^2) (1 - x^2 + x^3)]
```

```
1 + 2 x - x^3 + x^4 + x^5
```

Obtenemos una lista de los coeficientes de la indeterminada x del polinomio anterior, de la forma

```
CoefficientList[%, x]
```

```
{1, 2, 0, -1, 1, 1}
```

como vemos comienza por el de grado 0 hasta el de grado 5.

Si queremos saber el grado del polinomio escribiremos

```
Exponent[(1 + 2 x + x^2) (1 - x^2 + x^3), x]
```

```
5
```

Observemos que para el polinomio constante su grado es 0

```
Exponent[7, x]
```

```
0
```

salvo en el caso en que sea 0, que requerirá un especial cuidado pues

```
Exponent[0, x]
```

```
-∞
```

2. Polinomios en $\mathbb{Z}_n$

■ Ejemplo 13.4.

Calcular el polinomio $2x^2 + x + 1$ módulo 2.

```
PolynomialMod[2 x^2 + x + 1, 2]
```

```
1 + x
```

3. Algoritmo de la división

■ Ejemplo 13.5.

Calcular el cociente y el resto que resulta de dividir $x^7 + 2x^3 - x - 5$ entre $x^2 + 1$.

```
PolynomialQuotient[x^7 + 2 x^3 - x - 5, x^2 + 1, x]
```

```
3 x - x^3 + x^5
```

```
PolynomialRemainder[x^7 + 2 x^3 - x - 5, x^2 + 1, x]
```

```
-5 - 4 x
```

■ Ejemplo 13.6.

Calcular el cociente y el resto que resulta de dividir $x^7 + 2x^3 - x - 5$ entre $x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

En primer lugar, pasamos los polinomios a $\mathbb{Z}_5[x]$

```
PolynomialMod[x^7 + 2 x^3 - x - 5, 5]
```

```
4 x + 2 x^3 + x^7
```

Observemos que $x^2 + 1$ ya tiene sus coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.

Calculamos ahora el cociente y el resto que resulta de dividirlos en $\mathbb{Z}[x]$

```
PolynomialQuotient[4 x + 2 x^3 + x^7, x^2 + 1, x]
```

```
3 x - x^3 + x^5
```

```
PolynomialRemainder[4 x + 2 x^3 + x^7, x^2 + 1, x]
```

```
x
```

y ahora volvemos a pasar los resultados anteriores a $\mathbb{Z}_5[x]$ y serán los cocientes y restos que buscamos

```
PolynomialMod[3 x - x^3 + x^5, 5]
```

```
PolynomialMod[x, 5]
```

```
3 x + 4 x^3 + x^5
```

```
x
```

4. Factorización y cálculo de raíces

4.1. Factorización y cálculo de raíces en $\mathbb{Z}$

■ Ejemplo 13.7.

Calcular la factorización en irreducibles y las raíces de $2x^6 - 5x^5 + 5x^3 - 6x^2 + 10x - 4$, en $\mathbb{Z}[x]$.

```
Factor[2 x^6 - 5 x^5 + 5 x^3 - 6 x^2 + 10 x - 4]
```

```
(-2 + x) (-1 + 2 x) (-2 + x^2) (1 + x^2)
```

es la factorización en $\mathbb{Z}[x]$ del polinomio y su única raíz en $\mathbb{Z}$ es 2.

4.2. Factorización y cálculo de raíces en $\mathbb{Z}_n$

■ Ejemplo 13.7.

Calcular la factorización en irreducibles y las raíces de $2x^6 - 5x^5 + 5x^3 - 6x^2 + 10x - 4$, en $\mathbb{Z}_2[x]$ y en $\mathbb{Z}_3[x]$.

Para calcular la factorización en irreducibles del polinomio en $\mathbb{Z}_2[x]$

```
Factor[2 x^6 - 5 x^5 + 5 x^3 - 6 x^2 + 10 x - 4, Modulus -> 2]
```

```
x^3 (1 + x)^2
```

y sus raíces son: el 0 (triple) y el $(-1)=1$ con multiplicidad 2.

Para calcular la factorización en irreducibles del polinomio en $\mathbb{Z}_3[x]$

```
Factor[2 x^6 - 5 x^5 + 5 x^3 - 6 x^2 + 10 x - 4, Modulus -> 3]
```

```
2 (1 + x)^2 (1 + x^2)^2
```

y su raíz es el $(-1) = 2$ con multiplicidad 2.

4.3. Factorización y cálculo de raíces en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

■ Ejemplo 13.7.

Calcular la factorización en irreducibles y las raíces de $2x^6 - 5x^5 + 5x^3 - 6x^2 + 10x - 4$, en $\mathbb{Q}[x]$, en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

Para calcular la factorización en irreducibles del polinomio en estos anillos comenzaremos calculando sus raíces

```
In[14]:= Roots[2 x^6 - 5 x^5 + 5 x^3 - 6 x^2 + 10 x - 4 == 0, x]
```

```
Out[14]:= x == 1 || x == -1 || x == sqrt(2) || x == -sqrt(2) || x == 1/2 || x == 2
```

Así, en $\mathbb{Q}$ sus raíces son: el 2 y $1/2$ y la factorización del polinomio será $2(x - 2)(x - 1/2)q_1(x)$ siendo $q_1(x)$ el cociente de $2x^6 - 5x^5 + 5x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ entre $2(x - 2)(x - 1/2)$. Es decir, $q_1(x)$ es

```
In[22]:= PolynomialQuotient[2 x^6 - 5 x^5 + 5 x^3 - 6 x^2 + 10 x - 4,
Expand[2 (x - 2) (x - 1/2)], x]
```

```
Out[22]:= -2 - x^2 + x^4
```

```
In[20]:= Factor[%]
```

```
Out[20]:= (-2 + x^2) (1 + x^2)
```

Por tanto, la factorización del polinomio

en $\mathbb{Q}[x]$ es $2(x - 2)(x - 1/2)(-2 + x^2)(1 + x^2)$.

En $\mathbb{R}$ sus raíces son: el 2, $1/2$, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ y la factorización del polinomio será

$$2(x - 2)(x - 1/2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$q_2(x)$

siendo $q_2(x)$ el cociente de $2x^6 - 5x^5 + 5x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ entre $2(x - 2)(x - 1/2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Es decir, $q_2(x)$ es el siguiente cociente

```
In[36]:= PolynomialQuotient[2 x^6 - 5 x^5 + 5 x^3 - 6 x^2 + 10 x - 4,
  Expand[2 (x - 2) (x - 1/2) * (x - sqrt(2)) * (x + sqrt(2))], x]
```

```
Out[36]= 1 + x^2
```

Como sabemos todas las raíces son complejas. Así, el 2, $1/2$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, i y $-i$ son las raíces en $\mathbb{C}$ y la factorización del polinomio será $2(x - 2)(x - 1/2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i)$.

5. Factorización de polinomios: máximo común divisor y mínimo común múltiplo

■ Ejemplo 13.8.

Calcular una lista de todos los divisores del polinomio $x^5 + x + 1$

```
FactorList[x^5 + x + 1]
```

```
{{1, 1}, {1 + x + x^2, 1}, {1 - x^2 + x^3, 1}}
```

■ Ejemplo 13.9.

Observar la forma en que las funciones Factor[] o FactorList[] presentan los divisores del polinomio $8x^5 - 16x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 32x + 32$

```
FactorList[8 x^5 - 16 x^4 - 16 x^3 + 8 x^2 + 32 x + 32]
```

```
{{8, 1}, {-2 + x, 2}, {1 + x, 1}, {1 + x + x^2, 1}}
```

```
Factor[8 x^5 - 16 x^4 - 16 x^3 + 8 x^2 + 32 x + 32]
```

```
8 (-2 + x)^2 (1 + x) (1 + x + x^2)
```

■ Ejemplo 13.10.

Calcular, a partir de sus divisores, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $8x^5 - 16x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 32x + 32$ y $4x^3 - 12x - 8$

```
FactorList[8 x^5 - 16 x^4 - 16 x^3 + 8 x^2 + 32 x + 32]
```

```
{{8, 1}, {-2 + x, 2}, {1 + x, 1}, {1 + x + x^2, 1}}
```

```
FactorList[4 x^3 - 12 x - 8]
```

```
{{4, 1}, {-2 + x, 1}, {1 + x, 2}}
```

Así, para el máximo común divisor (comunes elevados al menor exponente) tomaremos $(-2 + x)(1 + x)$ y un mínimo común múltiplo (comunes y no comunes elevados al mayor exponente) será $(-2 + x)^2(1 + x)^2(1 + x + x^2)$ que, en forma extendida son

```
Expand[(-2 + x) (1 + x)]
```

```
Expand[(-2 + x)^2 (1 + x)^2 (1 + x + x^2)]
```

```
-2 - x + x^2
```

```
4 + 8 x + 5 x^2 - x^3 - 4 x^4 - x^5 + x^6
```

■ Ejemplo 13.11.

Calcular, usando las funciones de *Mathematica*, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios del ejemplo anterior.

```
PolynomialGCD[8 x^5 - 16 x^4 - 16 x^3 + 8 x^2 + 32 x + 32, 4 x^3 - 12 x - 8]
```

```
PolynomialLCM[8 x^5 - 16 x^4 - 16 x^3 + 8 x^2 + 32 x + 32, 4 x^3 - 12 x - 8]
```

```
-8 - 4 x + 4 x^2
```

```
(-4 - 2 x - 2 x^2 + 2 x^3) (-8 - 12 x + 4 x^3)
```

```
In[37]:= Expand[(-4 - 2 x - 2 x^2 + 2 x^3) (-8 - 12 x + 4 x^3)]
```

```
Out[37]= 32 + 64 x + 40 x^2 - 8 x^3 - 32 x^4 - 8 x^5 + 8 x^6
```

Observemos que los resultados son polinomios asociados a los del ejemplo anterior.

■ Ejemplo 13.12.

Calcular, usando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $8x^5 - 16x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 32x + 32$ y $4x^3 - 12x - 8$

Usando el programa 13.1., introducimos los polinomios

```
Clear["Global`*"]
```

```
p1 = 8 x^5 - 16 x^4 - 16 x^3 + 8 x^2 + 32 x + 32;
p2 = 4 x^3 - 12 x - 8;
a = Exponent[p1, x]; b = Exponent[p2, x];
If[a < b, p = p2; q = p1,
    p = p1; q = p2];
While[Exponent[q, x] ≥ 1 && Exponent[p, x] ≥ Exponent[q, x],
    m = PolynomialRemainder[p, q, x];
    p = q; q = m;
];
Print["m.c.d.(", p1, ",", p2, ")=", p]
Print["m.c.m.(", p1, ",", p2, ")=", PolynomialQuotient[p1 * p2, p, x]]
```

```
m.c.d. (32 + 32 x + 8 x^2 - 16 x^3 - 16 x^4 + 8 x^5, -8 - 12 x + 4 x^3) = 48 + 24 x - 24 x^2
```

```
m.c.m. (32 + 32 x + 8 x^2 - 16 x^3 - 16 x^4 + 8 x^5, -8 - 12 x + 4 x^3)
) = -16/3 - 32 x/3 - 20 x^2/3 + 4 x^3/3 + 16 x^4/3 + 4 x^5/3 - 4 x^6/3
```

Nótese que nuevamente los resultados obtenidos son polinomios distintos a los de los ejemplos anteriores, pero vuelven a ser asociados.