



PRÁCTICA Nº2

SUBGRUPOS

Sea $(G, *)$ un grupo, diremos que un subconjunto no vacío H de G es un subgrupo de G si verifica:

- Sea $e \in G$ el elemento neutro de G entonces $e \in H$.
- Para cada $h \in H$, su simétrico $h' \in H$.
- Es cerrado para la operación $*$, esto es, para cada $h_1, h_2 \in H$, $h_1 * h_2 \in H$.

Obsérvese que en tal caso $(H, *)$ también tiene estructura de grupo.

Cuando tenemos un grupo finito podemos comprobar estas propiedades fácilmente como muestra el ejemplo 1, en el caso infinito y al igual que ocurre con los grupos infinitos todo dependerá del tipo de datos y operación dada, en muchos casos también podremos hacer comprobaciones directas.

Ejemplo 1. Sea $G = \{a, b, c, d\}$ y $*$ la ley de composición interna dada por:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

Tabla 1.

Comprobar si los subconjuntos $H_1 = \{a, b\}$ y $H_2 = \{b, c\}$ de G son subgrupos.

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
            operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
            op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x]][[1]],Position[G,y]][[1]][[1]][[1]]];
```

Comprobamos las tres propiedades por separado:

- Calculamos el elemento neutro y comprobamos si pertenece a H_1 y H_2 .

```
In[]:=      ElementoNeutro="No existe";
```

```
           ⋮           ⋮
```

```
Out[]:=      Elemento Neutro:  a
```

Como $a \notin H_2$, ya podemos asegurar que H_2 no es subgrupo.

- Continuamos estudiando sólo a H_1 , que si contiene al neutro a , ahora calculamos los simétricos de los elementos de H_1 utilizando la función `simetrico[]`:

```
In[]:=      simetrico[x_]:=Module[{simetrico,CONTADORi},
```

```
           ⋮           ⋮
```

La aplicamos a los elementos que nos interesan,

$In[] := \text{simetrico}[a]$

$Out[] = a$

$In[] := \text{simetrico}[b]$

$Out[] = b$

Luego la propiedad segunda también es verificada por H_1 .

c) Por último comprobamos que es cerrado para la operación:

$In[] := \text{op}[a,a]$

$Out[] = a$

$In[] := \text{op}[a,b]$

$Out[] = b$

$In[] := \text{op}[b,a]$

$Out[] = b$

$In[] := \text{op}[b,b]$

$Out[] = a$

En consecuencia H_1 si es subgrupo. □

Utilizando la siguiente caracterización también podemos implementar directamente un test:

Proposición 1. Equivalentemente, diremos que H es subgrupo de G , si para cada par de elementos $x, y \in H$, entonces $x * y' \in H$, donde y' es el simétrico de y . □

Implementamos la caracterización para grupos finitos con el siguiente programa:

FUNCIÓN	COMENTARIOS
G=GRUPO; operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;	Introducimos el grupo "G".
op[x,y]:=...	Introducimos la función 1 de la práctica 1.
ElementoNeutro=...	Calculamos el elemento neutro con el programa 3 de la práctica 1.
simetrico[x]:=...	Definimos la función 5 de la práctica 1.
SUBGRUPO[H]:=Module[{subgrupo,CONTADORi,CONTADORj}, subgrupo=True; CONTADORi=1;	La función tendrá como argumento a un subconjunto "H" de "G".
While[subgrupo && CONTADORi<=Length[H], CONTADORj=1; While[subgrupo && CONTADORj<=Length[H], If[Intersection[{op[H[[CONTADORi]], simetrico[H[[CONTADORj]]]],H]=={, subgrupo=False;}; CONTADORj++; }; CONTADORi++;];	Comprobamos si en algún caso no se verifica la condición equivalente.

subgrupo]	Se muestran los resultados.
----------------------	-----------------------------

Función 1. Subgrupos.

Ejemplo 2. Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1. Comprobar si los subconjuntos $H_1 = \{a, b\}$ y $H_2 = \{b, c\}$ de G son subgrupos usando la función 1.

Como siempre definimos las funciones e introducimos los programas previos necesarios:

```
In[ ]:=      G={a,b,c,d};
             operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
             op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

```
In[ ]:=      ElementoNeutro="No existe";

             :           :
```

```
In[ ]:=      simetrico[x_]:=Module[{simetrico,CONTADORi},

             :           :
```

Definimos la función 1.

```
In[ ]:=      SUBGRUPO[H_]:=Module[{subgrupo,CONTADORi,CONTADORj},

             :           :
```

Comprobamos si H_1 y H_2 son subgrupos:

```
In[ ]:=      SUBGRUPO[{a,b}]
```

```
Out[ ]=      True
```

```
In[ ]:=      SUBGRUPO[{b,c}]
```

```
Out[ ]=      False
```

□