



# PRÁCTICA Nº1

## GRUPOS

Recordemos la definición de grupo:

Un grupo es un par  $(G, *)$  formado por un conjunto  $G \neq \emptyset$  y una ley de composición interna

$$*: G \times G \rightarrow G$$

verificando las siguientes propiedades:

- i. Elemento Neutro: Existe  $e \in G$  tal que  $e * a = a * e = a$  para cada  $a \in G$ .
- ii. Elemento simétrico: Para cada  $a \in G$ , existe  $a' \in G$  tal que  $a * a' = a' * a = e$ .
- iii. Asociativa:  $(a * b) * c = a * (b * c)$  para cada  $a, b, c \in G$ .

Se dirá que es un grupo abeliano o conmutativo si además verifica:

- iv. Conmutativa:  $a * b = b * a$  para cada  $a, b \in G$ .

### 1. GRUPOS FINITOS

Sea  $(G, *)$  un grupo, si el conjunto  $G$  es finito se dice que es un grupo finito, si tiene  $n$  elementos diremos que es de orden  $n$  y escribiremos:

$$|G| = n.$$

Para un grupo finito con  $n$  elementos podemos representar la ley de composición interna por una tabla de doble entrada de  $n$  filas por  $n$  columnas:

Si  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , tendríamos:

| *        | $g_1$       | $g_2$       | $\dots$  | $g_n$       |
|----------|-------------|-------------|----------|-------------|
| $g_1$    | $g_1 * g_1$ | $g_1 * g_2$ | $\dots$  | $g_1 * g_n$ |
| $g_2$    | $g_2 * g_1$ | $g_2 * g_2$ | $\dots$  | $g_2 * g_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$    |
| $g_n$    | $g_n * g_1$ | $g_n * g_2$ | $\dots$  | $g_n * g_n$ |

Tabla 1. Tabla de operaciones de un grupo.

Así, podríamos introducir un grupo finito en el ordenador de forma directa, el conjunto como una lista de elementos y la operación como una tabla de doble entrada:

```
In[]:= G={g1,g2,...,gn};
operacion= TABLA DE TODAS LAS OPERACIONES;
```

**Ejemplo 1.** Sea  $G = \{a, b, c, d\}$  y  $*$  la ley de composición interna dada por:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| * | a | b | c | d |
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |
| c | c | d | b | a |
| d | d | c | a | b |

Tabla 2.

Que introduciremos en el ordenador directamente:

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
            operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
```

Obsérvese que por ejemplo  $c * b$  vendría dado por `operacion[[3,2]]`.

□

En general si  $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , entonces  $x_i * x_j$  sería  $G[[i]] * G[[j]]$ , y lo calcularíamos con `operacion[[i,j]]`. Para facilitar el cálculo podemos definir una función que opere dos elementos cualesquiera directamente y no a través de su índice, para ello utilizaremos la función de Mathematica `Position[]` de la siguiente forma:

**Position[lista, elemento]**

Que devuelve una lista formada por vectores que indican que elementos de “lista” coinciden con “elemento” o contienen a “elemento” en cuyo caso también indicará la posición.

| FUNCIÓN                                                              | COMENTARIOS                                              |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b><br><b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>       | Introducimos el grupo y su tabla de operaciones.         |
| <b>op[x_,y_]:=</b>                                                   | La función tendrá dos entradas: dos elementos del grupo. |
| <b>operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];</b> | Usamos la función <code>Position[]</code> .              |

Función 1. Operación de un grupo.

Ahora creamos unas rutinas que comprueben cada una de las propiedades.

## 1.1. OPERACIÓN INTERNA

Aunque a la vista de la tabla “operacion” puede resultar obvio si la operación es interna o no, esto es, que  $g * f \in G$  para cada  $g, f \in G$ , sin embargo es conveniente generar una pequeña rutina que hiciese esta comprobación para casos no evidentes o donde la tabla venga dada de forma algorítmica.

| PROGRAMA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | COMENTARIOS                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b><br><b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Introducimos el grupo.                                                                       |
| <b>op[x_,y_]:=...</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Introducimos la función 1.                                                                   |
| <b>operacioninterna=True;</b><br><b>CONTADORi=1;</b><br><b>While[operacioninterna &amp;&amp; CONTADORi&lt;=Length[G],</b><br><b>CONTADORj=1;</b><br><b>While[operacioninterna &amp;&amp; CONTADORj&lt;=Length[G],</b><br><b>If[Intersection[{op[G[[CONTADORi]],</b><br><b>G[[CONTADORj]]}],G]=={},operacioninterna=False];</b><br><b>CONTADORj++;</b><br><b>];</b><br><b>CONTADORi++;</b><br><b>];</b> | Suponemos de partida que sí se verifica.<br><br>Comprobamos si en algún caso no se verifica. |
| <b>operacioninterna</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Se muestran los resultados.                                                                  |

Programa 2. Operación interna.

**Ejemplo 2.** Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1. Comprobamos que en efecto dicha operación es interna.

Introducimos el grupo y la operación:

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
            operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};

In[]:=      op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

Usamos el programa 2:

```
In[]:=      operacioninterna=True;

            :           :

Out[]:=      True
```

□

## 1.2. ELEMENTO NEUTRO

El elemento neutro si existe es único, luego bastará con buscar un elemento que verifique la propiedad del elemento neutro.

| PROGRAMA                                                 | COMENTARIOS                         |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b>                                          | Introducimos el grupo.              |
| <b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>              |                                     |
| <b>op[x_,y_]:=...</b>                                    | Introducimos la función 1.          |
| <b>ElementoNeutro="No existe";</b>                       | Suponemos de partida que no existe. |
| <b>Do[</b>                                               |                                     |
| <b>If [ElementoNeutro=="No existe",</b>                  |                                     |
| <b>neutro=True;</b>                                      |                                     |
| <b>Do[</b>                                               |                                     |
| <b>If[TrueQ[op[G[[CONTADORi]],G[[CONTADORj]]]==</b>      |                                     |
| <b>op[G[[CONTADORj]],G[[CONTADORi]]] &amp;&amp;</b>      |                                     |
| <b>TrueQ[op[G[[CONTADORi]],G[[CONTADORj]]]==</b>         |                                     |
| <b>G[[CONTADORj]],neutro=False;Break[]];</b>             |                                     |
| <b>,{CONTADORj,1,Length[G]}];</b>                        |                                     |
| <b>If[neutro,ElementoNeutro=G[[CONTADORi]];Break[]];</b> |                                     |
| <b>];</b>                                                |                                     |
| <b>,{CONTADORi,1,Length[G]}];</b>                        |                                     |
| <b>Print["Elemento Neutro: ",ElementoNeutro]</b>         | Se muestran los resultados.         |

Programa 3. Elemento neutro.

Otra forma de determinar el elemento neutro es directamente fijándonos en la tabla de operaciones, la lista G debe de aparecer como una fila y columna en la misma posición, para ello usaremos la función de Mathematica: Transpose[].

**Ejemplo 3.** Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1.

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
            operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
            op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

Utilizamos el programa 3 y determinamos el elemento neutro.

```
In[]:=      ElementoNeutro="No existe";

            :           :

Out[]:=      Elemento Neutro:  a
```

□

### 1.3. ELEMENTO SIMÉTRICO

Al igual que le ocurre al neutro, si existe el simétrico de un elemento, este es único. Calculamos, si existen, los elementos simétricos de todos los elementos de  $G$ . El elemento neutro ya está calculado en 1.2. y supondremos que está almacenado en la variable “ElementoNeutro”.

| FUNCIÓN                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | COMENTARIOS                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b><br><b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Introducimos el grupo “G”.                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>op[x_,y_]:=...</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Introducimos la función 1.                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>ElementoNeutro=...</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Calculamos el elemento neutro con el programa 3.                                                                                                                                                                                                       |
| <b>ELEMENTOSIMETRICO:=Block[</b><br><b>{CONTADORi,CONTADORj,Nosim,ElementoSimetrico},</b><br><b>ElementoSimetrico={G,Table["-",{CONTADORi,1,Length[G]}}];</b><br><b>Nosim={};</b><br><b>Do[</b><br><b>Do[</b><br><b>If[TrueQ[op[G[[CONTADORi]],G[[CONTADORj]]]==</b><br><b>op[G[[CONTADORj]],G[[CONTADORi]]]</b><br><b>&amp;&amp;</b><br><b>TrueQ[op[G[[CONTADORi]],G[[CONTADORj]]]==</b><br><b>ElementoNeutro]</b><br><b>,ElementoSimetrico[[2,CONTADORi]]=G[[CONTADORj]];</b><br><b>Break[]];</b><br><b>,{CONTADORj,1,Length[G]};</b><br><b>If[ElementoSimetrico[[2,CONTADORi]]=="-",</b><br><b>AppendTo[Nosim,G[[CONTADORi]]];</b><br><b>,{CONTADORi,1,Length[G]};</b><br><b>Print[TableForm[ElementoSimetrico,</b><br><b>TableHeadings-&gt;{"Elemento:", "Simétrico:"},Automatic]]];</b><br><b>If[Nosim=={},True,False]</b><br><b>]</b> | Generamos las tablas donde meteros los simétricos.<br><br>Se comprueba la propiedad que debe verificar un elemento para ser el simétrico de otro.<br><br>Bucle que recorre todos los elementos de $G$ para calcular el simétrico de cada uno de ellos. |
| <b>Print[TableForm[ElementoSimetrico,</b><br><b>TableHeadings-&gt;{"Elemento:", "Simétrico:"},Automatic]]];</b><br><b>If[Nosim=={},True,False]</b><br><b>]</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Se muestran los resultados.                                                                                                                                                                                                                            |

Función 4. Elemento simétrico.

**Ejemplo 4.** Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1. Introducimos la función 1 y el programa 3 para tener identificado al elemento neutro.

```
In[ ]:=      G={a,b,c,d};
             operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
             op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

```
In[ ]:=      ElementoNeutro="No existe";
```

```
             :
```

```
Out[ ]=      Elemento Neutro:  a
```

Calculamos, si existen, todos los simétricos y comprobamos si se verifica esta propiedad

```
In[ ]:=      ELEMENTOSIMETRICO:=Block[
```

```
             :
```

```
In[ ]:=      ELEMENTOSIMETRICO
```

```
Out[ ]=
```

```
             1 2 3 4
             Elemento: a b c d
             Simétrico: a b d c
```

```
True
```

□

También programamos una función que determine el simétrico de un elemento en particular, que como comprobaremos más adelante, será más cómoda de utilizar.

| FUNCIÓN                                                                                                                                         | COMENTARIOS                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b>                                                                                                                                 | Introducimos el grupo “G”.                                             |
| <b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>                                                                                                     | Introducimos la función 1.                                             |
| <b>op[x ,y ]:=...</b>                                                                                                                           | Calculamos el elemento neutro con el programa 3.                       |
| <b>ElementoNeutro=...</b>                                                                                                                       |                                                                        |
| <b>simetrico[x _]:=Module[{simetrico,CONTADORi},<br/>simetrico=0;</b>                                                                           | La función tendrá como entrada un elemento “x” del grupo.              |
| <b>Do</b><br><b>If[op[x,G[[CONTADORi]]]==</b><br><b>ElementoNeutro,simetrico=G[[CONTADORi]];Break[[]];</b><br><b>,{CONTADORi,1,Length[G]}];</b> | Opera “x” con todos los elementos de “G” hasta encontrar su simétrico. |
| <b>simetrico</b><br><b>];</b>                                                                                                                   | Se muestran los resultados.                                            |

Función 5. Cálculo de un elemento simétrico.

**Ejemplo 5.** Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1. Calcular el elemento simétrico de  $a$  y  $d$ .

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
            operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
            op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

Determinamos el elemento neutro:

```
In[]:=      ElementoNeutro="No existe";

            ::
```

Definimos la función simetrico[]:

```
In[]:=      simetrico[x _]:=Module[{simetrico,CONTADORi},

            ::
```

La aplicamos a los elementos que nos interesan,

```
In[]:=      simetrico[a]
```

```
Out[]:=      a
```

y

```
In[]:=      simetrico[d]
```

```
Out[]:=      c
```

Y en efecto:

```
In[]:=      op[a,a]
```

```
Out[]:=      a
```

```
In[]:=      op[d,c]
```

```
Out[]:=      a
```

□

Al igual que en las propiedades anteriores podríamos determinar el simétrico de un elemento fijándonos directamente en la tabla.

## 1.4. ASOCIATIVA

Bastará con programar tres bucles anidados que recorran todas las posibles ternas de tres elementos de  $G$  y se compruebe si se verifica la propiedad asociativa para cada una de ellas.

| FUNCIÓN                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | COMENTARIOS                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b><br><b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Introducimos el grupo.                       |
| <b>op[x_,y_] := ...</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Introducimos la función 1.                   |
| <b>ASOCIATIVA:=Block[</b><br><b>{CONTADORi,CONTADORj,CONTADORK,asociativa},</b><br><b>asociativa=True;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Suponemos de partida que sí se verifica.     |
| <b>CONTADORi=1;</b><br><b>While[asociativa &amp;&amp; CONTADORi≤Length[G],</b><br><b>CONTADORj=1;</b><br><b>While[asociativa &amp;&amp; CONTADORj≤Length[G],</b><br><b>CONTADORK=1;</b><br><b>While[asociativa &amp;&amp; CONTADORK≤Length[G],</b><br><b>If[TrueQ[op[op[G[[CONTADORi]],</b><br><b>G[[CONTADORj]]],G[[CONTADORK]]]==</b><br><b>op[G[[CONTADORi]],op[G[[CONTADORj]],</b><br><b>G[[CONTADORK]]]],,,asociativa=False];</b><br><b>CONTADORK++;</b><br><b>];</b><br><b>CONTADORj++;</b><br><b>];</b><br><b>CONTADORi++;</b><br><b>];</b> | Comprobamos si en algún caso no se verifica. |
| <b>asociativa</b><br><b>]</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Se muestran los resultados.                  |

Función 6. Propiedad Asociativa.

**Ejemplo 6.** Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1 y los introducimos junto con la función 1:

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
op[x_,y_] := operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

Utilizamos el programa 6 para comprobar la asociatividad.

```
In[]:=      ASOCIATIVA:=Block[
                                     :
                                     :
```

```
In[]:=      ASOCIATIVA
```

```
Out[]:=     True
```

Luego como la operación es asociativa, por los ejemplos 2, 3 y 4, podemos asegurar que  $G$  es un grupo.  $\square$

## 1.5. CONMUTATIVA

Por último, aunque puede que sea obvio observando la simetría de la tabla de operaciones, también queremos comprobar si es un grupo conmutativo. Lo analizamos de forma similar al programa 6.

| FUNCIÓN                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | COMENTARIOS                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| <b>G=GRUPO;</b><br><b>operacion=TABLA DE OPERACIONES DE G;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Introducimos el grupo.                       |
| <b>op[x_,y_]:=...</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Introducimos la función 1.                   |
| <b>CONMUTATIVA:=Block[</b><br><b>{CONTADORi,CONTADORj,conmutativa},</b><br><b>conmutativa=True;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Suponemos de partida que sí se verifica.     |
| <b>CONTADORi=1;</b><br><b>While[conmutativa &amp;&amp; CONTADORi&lt;=Lenght[G],</b><br><b>CONTADORj=1;</b><br><b>While[conmutativa &amp;&amp; CONTADORj&lt;=Lenght[G],</b><br><b>If[TrueQ[op[G[[CONTADORi]],G[[CONTADORj]]]==</b><br><b>op[G[[CONTADORj]],G[[CONTADORi]]]</b><br><b>„conmutativa=False];</b><br><b>CONTADORj++;</b><br><b>];</b><br><b>CONTADORi++;</b><br><b>];</b> | Comprobamos si en algún caso no se verifica. |
| <b>conmutativa</b><br><b>]</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Se muestran los resultados.                  |

Función 7. Propiedad Conmutativa.

**Ejemplo 7.** Consideramos el mismo conjunto y operación interna del ejemplo 1.

```
In[]:=      G={a,b,c,d};
operacion={{a,b,c,d},{b,a,d,c},{c,d,b,a},{d,c,a,b}};
op[x_,y_]:=operacion[[Position[G,x][[1]],Position[G,y][[1]]][[1]][[1]]];
```

Usando el programa 7 comprobamos la propiedad conmutativa.

```
In[]:=      CONMUTATIVA:=Block[
```

```
              :           :
```

```
In[]:=      CONMUTATIVA
```

```
Out[]:=      True
```

Por tanto  $G$  es un grupo conmutativo. □

También podríamos comprobar la propiedad conmutativa directamente, de manera más sencilla, verificando la simetría de la tabla “operacion” con Mathematica,

**Transpose[operacion]==operacion**

## 2. OTROS EJEMPLOS Y GRUPOS INFINITOS

En algunas ocasiones los grupos finitos, si los elementos son numéricos y lo permiten, se pueden manejar de forma más cómoda respecto a como hemos visto en las secciones anteriores, como podemos ver en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 8.**  $\mathbb{Z}_n$ . Si queremos usar el grupo conmutativo  $(\mathbb{Z}_n, +)$  bastará con tener en cuenta que,  $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$  y así podemos manejar fácilmente la operación y el conjunto:

```
In[]:=      n=ENTERO MAYOR QUE UNO;
Zn=Table[i,{i,0,n-1}];
operacion=Table[Mod[x+y,n],{x,0,n-1},{y,0,n-1}];
op[x_,y_]:=Mod[x+y,n];
```

□

Si el conjunto  $G$ , aunque no sea finito, es un conjunto de valores numéricos y la operación se basa en operaciones ya implementadas en el programa (suma, resta, producto,...), en algunos de estos casos y aun a pesar de la infinitud, pueden solventarse los problemas, aunque la resolución precise de ideas originales y particulares según el ejemplo, sirvan como muestra los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 9.** Comprobar que el conjunto  $G = \mathbb{R} - \{-1\}$  con la operación:

$$x * y = xy + x + y$$

es un grupo conmutativo.

- a) En primer lugar definimos la operación:

```
In[]:=          op[x_,y_]:=x y+x+y;
```

- b) Comprobamos que es interna:

```
In[]:=          Solve[op[x,y]==-1,{x,y}]
```

```
Solve:: svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. More...
```

```
Out[]=          {{x->-1},{y->-1}}
```

en efecto es ley de composición interna, pues salvo para  $x = -1$  o  $y = -1$ ,  $x * y \in \mathbb{R} - \{-1\}$ .

- c) Calculamos el neutro:

```
In[]:=          Solve[op[x,y]==x,y]
```

```
Out[]=          {{y->0}}
```

por tanto el elemento neutro es el 0.

- d) Calculamos el elemento simétrico de un  $x$  cualquiera:

```
In[]:=          Solve[op[x,y]==0,y]
```

```
Out[]=          {{y->-x/(1+x)}}
```

luego  $y = -\frac{x}{1+x}$  es el simétrico de  $x$  que existirá para cualquier  $x \neq -1$ .

- e) Comprobamos si es asociativa:

```
In[]:=          TrueQ[Expand[op[x,op[y,z]]]==Expand[op[op[x,y],z]]]
```

```
Out[]:=          True
```

por tanto es asociativa.

- f) Por último, comprobamos si es conmutativa:

```
In[]:=          TrueQ[Expand[op[x,y]]==Expand[op[y,x]]]
```

```
Out[]:=          True
```

Y así, concluimos que tenemos un grupo conmutativo.

□



**Ejemplo 10.** Comprobar si el conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  con la operación,

$$(a, b) * (c, d) = (ad + c, bd)$$

es un grupo conmutativo.

En primer lugar introducimos la operación:

```
In[ ]:=      op[{a_,b_},{c_,d_}]:={a*d+c,b*d};
```

La ley de composición es interna, porque  $bd \neq 0$  ya que  $b$  y  $d$  son elementos de  $\mathbb{R}^*$ .

Ahora comprobamos las propiedades de la operación, comprobamos si existe el elemento neutro y lo calculamos:

```
In[ ]:=      Solve[op[{a,b},{c,d}]=={a,b},{c,d}]
```

```
Out[ ]=      {{c -> 0, d -> 1}}
```

La única solución de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  es  $(0, 1)$ , que por tanto será el neutro. Ahora calculamos el simétrico:

```
In[ ]:=      Solve[op[{a,b},{c,d}]=={0,1},{c,d}]
```

```
Out[ ]=      {{c -> -a/b, d -> 1/b}}
```

Como  $b$  es distinto de cero, el simétrico de  $(a, b)$  siempre existe y es  $(-a/b, 1/b)$ . Veamos la propiedad asociativa:

```
In[ ]:=      Expand[op[op[{a,b},{c,d}],{e,f}]]==Expand[op[{a,b},op[{c,d},{e,f}]]]
```

```
Out[ ]=      True
```

Ya sabríamos que es un grupo, por último comprobamos la propiedad conmutativa:

```
In[ ]:=      Expand[op[{a,b},{c,d}]]==Expand[op[{c,d},{a,b}]]
```

```
Out[ ]=      {c+ad, bd}=={a+bc, bd}
```

Observamos que no responde “True”, y es porque no se puede asegurar que las primeras componentes de los pares ordenados,  $ad + c$  y  $a + bc$ , sean iguales, por tanto concluimos que no verifica la propiedad conmutativa y aunque se trata de un grupo, no es abeliano. Podemos utilizar para comparar las expresiones y ver si son idénticas el test “==”:

```
In[ ]:=      Expand[op[{a,b},{c,d}]]==Expand[op[{c,d},{a,b}]]
```

```
Out[ ]=      False
```

□

**Ejemplo 11.** Consideramos el conjunto  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$  con la operación:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Comprobar que  $(G, \cdot)$  es un grupo. ¿Es conmutativo?.

Definimos la operación y comprobamos que es interna.

```
In[ ]:=      op[{a_,b_},{c_,d_}]:={a*c - b*d,a*d + b*c};
```

```
In[ ]:=      Solve[op[{a,b},{c,d}]]=={0,0},{a,b,c,d}]
```

Solve:: svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. More...

Out[] =  $\{\{c \rightarrow 0, d \rightarrow 0\}, \{a \rightarrow -i b, c \rightarrow i d\}, \{a \rightarrow i b, c \rightarrow -i d\}, \{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0\}\}$

A la vista de la salida, el producto sólo alcanzará el valor (0,0) cuando  $(a, b)$  o  $(c, d)$  son (0,0), ya que el resto de casos son soluciones complejas, luego la operación es interna. Calculamos el neutro y el elemento simétrico de uno dado:

In[] := **Solve**[**op**[{a,b},{c,d}]=={a,b},{c,d}]

Out[] =  $\{\{c \rightarrow 1, d \rightarrow 0\}\}$

In[] := **Solve**[**op**[{a,b},{c,d}]=={1,0},{c,d}]

Out[] =  $\left\{ \left\{ c \rightarrow \frac{a}{a^2 + b^2}, d \rightarrow -\frac{b}{a^2 + b^2} \right\} \right\}$

El elemento neutro es (1, 0) y el simétrico de  $(a, b)$  es  $\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$ . Comprobamos ahora la propiedad asociativa, con lo cual ya sería grupo y la propiedad conmutativa para concluir que es un grupo abeliano.

In[] := **Expand**[**op**[**op**[{a,b},{c,d}],{e,f}]]==**Expand**[**op**[{a,b},**op**[{c,d},{e,f}]]]

Out[] = True

In[] := **Expand**[**op**[{a,b},{c,d}]]==**Expand**[**op**[{c,d},{a,b}]]

Out[] = True

□